R. Müller

Vektoren und Matrizen im Licht des neuen Lehrplans

1. Einleitung

Vergleicht man die Kapitel "Lineare Algebra und analytische Geometrie" des "alten" Lehrplans mit denen des "neuen" Lehrplans, so erkennt man in den Inhalten auf den ersten Blick nur eine Verschiebung des "Skalaren Produkts" und des Themenkreises "Orthogonalität" von der 6. Klasse in die 5. Klasse. Ist also alles beim alten geblieben ?

Mitnichten ! "Neue" Inhalte betreffend Vektoren und Matrizen finden sich z.B. im Kapitel "Daten- und Beziehungsstrukturen", oder auch bei der Untersuchung "vernetzter Systeme" in der 7. Klasse. Der wesentlichste Unterschied besteht jedoch in der Intention des neuen Lehrplans,

- die Selbsttätigkeit des Schülers verstärkt zu fordern und zu fördern,
- heuristische Strategien bewußt(er) zu machen und bewußt(er) anzuwenden,
- den Modellaspekt vermehrt in den Unterricht einzubringen,
- Querverbindungen zur Informatik herzustellen.

Blickt man in die drei bisher erschienen Lehrbücher (L1-L3) für die 5. Klasse, so findet man dort drei Zugänge bzw. Anknüpfungspunkte:

- den geometrischen Zugang,
- den physikalischen Zugang,
- den Zugang über Datenstrukturen.

Der Zugang über die Geometrie hat - im besten Sinn des Wortes - Tradition. Dieser Weg erlaubt ein stets an die Anschauung gekoppeltes Arbeiten mit Vektoren und - unter Einbeziehung von linearen Abbildungen - Matrizen. Diesem Weg ist an dieser Stelle nichts hinzuzufügen, außer eine Bemerkung zur Notation. Notationen der Art $\overline{AE}=E-A$ oder $H=1/2\cdot A+1/2\cdot B$ werden von vielen Kollegen mit Skepsis oder sogar Unwillen betrachtet, obwohl sie sachlich korrekt sind (L4). "E-A" bedeutet eben nicht die "Subtraktion" zweier Punkte, sondern die Subtraktion zweier geordneter Zahlentripel, und ebenso beschreibt "1/2•A" keinen "halben" Punkt. Die Vereinheitlichung der Schreibweisen an den AHS und die Heranführung der Notation an die auch an den Universitäten üblichen Schreibweise ist sicherlich wünschenswert, und hat daher auch in den Lehrbüchern ihren Niederschlag gefunden.

Der Zugang über die Physik ist problematisch. Die Deutung einer Einzelkraft als Vektor (und umgekehrt) ist sehr anschaulich, liefert aber kein Modell für die Struktur "Vektorraum". Eine ganz einfache Begründung ist die folgende: Da Einzelkräfte nur längs ihrer Wirkungslinie verschoben werden dürfen, ergibt die Summe $\vec{a}+(-\vec{a})$ im Fall gleicher Wirkungslinien den Nullvektor $\vec{o}$, im Fall verschiedener Wirkungslinien aber anstelle einer Einzelkraft ein Drehmoment. In diesem Sinn ist die Vektoraddition nicht einmal abgeschlossen. Die Verwendung homogener Kraftfelder wiederum ist nicht besonders anschaulich.

Der Zugang über Datenstrukturen hat erst im Zusammenhang mit der Informatik an Bedeutung gewonnen und besitzt demgemäß noch nicht sehr viel Tradition. Gerade deswegen steht dieser Weg im Mittelpunkt dieses Vortrages, ohne damit andere Zugänge als unzeitgemäß abwerten zu wollen. (In dem vom Autor mitverfaßten Lehrbuch L1 wird der geometrische Zugang favorisiert, nicht zuletzt deswegen, weil die Behandlung von Matrizen und vernetzten Systemen im wesentlichen dem Realgymnasium vorbehalten ist.)

2. Von Datenstrukturen zum Vektorraum

Vektoren und Matrizen können dazu dienen, "Ordnung" in eine größere Datenmenge zu bringen. Ein Beispiel dafür sind die nachfolgenden Fahrpreistabellen für einen Sessellift, der die Talstation A über die Zwischenstationen B und C mit der Bergstation D verbindet.

Bergfahrt

	A	B	C	D
A	-	15	20	35
B	-	-	15	25
C	-	-	-	20
D	-	-	-	-

Talfahrt

	A	B	C	D
A	-	10	15	20
B	-	-	10	20
C	-	-	-	15
D	-	-	-	-

An den einzelnen Stationen ist es nicht notwendig, die gesamte Information zur Verfügung zu stellen. Z.B. genügt es, in der Station B auf der Bergfahrt-Seite die 2. Zeile der linken Matrix, auf der Talfahrt-Seite die 2. Spalte der rechten Matrix anzubringen. Solchermaßen gehen "Vektoren" aus "Matrizen" hervor. Umgekehrt kann man die gegebenen Matrizen als "Zusammenfassung" der in den "Preisvektoren" niedergerlegten Informationen auffassen.

$$\text{Vektoren} \underset{\text{Analyse}}{\overset{\text{Synthese}}{\rightleftarrows}} \text{Matrizen}$$

Man kann auch die in den beiden "Dreiecksmatrizen" stehenden Informationen in einer einzigen Matrix zusammenfassen:

	A	B	C	D
A	0	15	20	35
B	10	0	15	25
C	15	10	0	20
D	20	20	15	0

Ersichtlich gelangt man zu dieser Matrix, indem man die rechte obige Matrix an der Hauptdiagonale spiegelt und zur linken obigen Matrix "addiert". Damit oder mit den folgenden Fragestellungen gewinnen Matrizen und Vektoren neben ihrer Bedeutung als "systematische Form einer Informationsdarstellung" auch einen operativen Charakter:

1) Gib in Form einer Matrix an, wieviel S die kombinierte Berg- und Talfahrt zwischen zwei beliebigen Stationen kostet, wenn der Preis die Summe der Einzelpreise ist !
2) Gib in Form einer Matrix an, um wieviel S die Talfahrt von x nach y billiger ist als die Bergfahrt von y nach x !
3) Die kombinierte Berg- und Talfahrt-Karte ist gegenüber den Einzelkarten um 20% verbilligt. Gib in Form einer Matrix die Fahrpreise zwischen zwei beliebigen Stationen x und y an !

Die Lösung dieser Aufgaben führt zur Matrizenaddition, Matrizensubtraktion und zur Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar:

	A	B	C	D
A	0	25	35	55
B	0	0	25	45
C	0	0	0	35
D	0	0	0	0

	A	B	C	D
A	0	5	5	15
B	0	0	5	5
C	0	0	0	5
D	0	0	0	0

	A	B	C	D
A	0	20	28	44
B	0	0	20	36
C	0	0	0	28
D	0	0	0	0

Bezogen auf die Aushangtafeln an den einzelnen Stationen führt diese Aufgabe auf die Vektoraddition, Vektorsubtraktion und Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Man sieht: Es ist durchaus möglich und aus dem Blickwinkel von Anwendungsproblemen durchaus sinnvoll, Matrizen vor den Vektoren oder gemeinsam mit diesen zu behandeln. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist man dabei keineswegs auf Dreiecksmatrizen beschränkt.

Beschreibe den Exporterfolg der Tiroler Souvenierindustrie in den letzen drei Jahren durch eine Matrix. Beschreibe die "Export-Schwankungen" zwischen zwei aufeinanderfolgenden Jahren mittels Matrizen, ...

1986

$$\begin{array}{l|c} & \begin{matrix}\text{Indien} & \text{Irland}\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}\text{Tirolerhüte}\\ \text{Triangeln}\end{matrix} & \begin{pmatrix}1200 & 820\\ 35000 & 1200\end{pmatrix}\end{array}$$

1987

$$\begin{pmatrix}1450 & 1000\\ 22000 & 1200\end{pmatrix}$$

1988

$$\begin{pmatrix}1550 & 920\\ 38000 & 900\end{pmatrix}$$

Man sieht schon: es ist gar nicht schwer, eine Fülle von Aufgaben zur Strukturierung von Daten in Form von Vektoren und Matrizen zu finden oder z.B. in projekthafter Form zusammenzutragen und eventuell am Computer einzuspeichern und zu bearbeiten. Beim Programmieren der Matrizen- bzw. Vektoroperationen können und müssen sich die Schüler die Definitionen und Rechenregeln für diese Rechenoperationen bewußt machen, ohne dabei aber schon strukturmathematische Überlegungen anstellen zu müssen, oder die Struktur "Vektorraum" zu definieren.

Die oben genannten Forderungen des Lehrplans nach Schülerselbsttätigkeit, nach Einbeziehung der Informatik und Bewußtmachen heuristischer Strategien (man denke an den Wechsel zwischen Vektoren und Matrizen durch Synthese und Analyse) wie auch den Grundkenntnissen und Grundfertigen im Umgang mit Matrizen und Vektoren wird damit in hohem Maße Rechnung getragen.

Dem Modellaspekt, dem Einblick in das historische Gewordensein von Mathematik und dem Anwendungsaspekt sowie strukturmathematischen Überlegungen wird damit allerdings noch nicht Genüge getan. Der in den bisherigen Überlegungen und Beispielen gebotene Begriff "Vektor" und "Matrix" ist ja - gemessen an der historischen Entwicklung dieser Begriffe und ihrer Bedeutung und Anwendung (vor allem) in der Geometrie und Physik - einseitig und trivial. Wie das folgende Beispiel zeigt, läßt sich allerdings unschwer eine Brücke hin zur Geometrie und zu nichttrivialen Anwendungen schlagen, wie sie z.B. vom Lehrplan für die 7. Klasse ("Vernetzte Systeme") gefordert werden.

3. Vektorfolgen und Matrizenfolgen

Die Bevölkerung Mathemataniens zerfällt in drei klar unterscheidbare "Klassen": "arm", "mittelständisch", "reich". Der jeweilige Vermögensstand jeder Klasse wird durch einen Vermögensvektor $\vec{v}$ beschrieben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{........ "arm"} \\ \text{........ "mittelständisch"} \\ \text{........ "reich"} \end{matrix}$$

Zum Abbau sozialer Spannungen wird vorgeschlagen, das Gesamtvermögen der drei Klassen alle 4 Jahre "umzuverteilen", und zwar gemäß folgender Vorschrift:

$$\vec{v}(k+1)=\begin{pmatrix}(v_1(k)+v_2(k))/2\\(v_1(k)+v_3(k))/2\\(v_2(k)+v_3(k))/2\end{pmatrix}$$

Berechne ausgehend vom momentanen Zustand $\vec{v}(\text{Ø})=(6|1\text{Ø}|2\text{Ø})$, wie sich das Vermögen der einzelnen Klassen in den folgenden Jahren verändern wird !

Die Aufgabe kann man "vektortechnisch" oder auch "matrizentechnisch" lösen. Letzteres führt auf die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor (MMV):

$$\vec{v}(k+1)=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & \text{Ø}\\1/2 & \text{Ø} & 1/2\\\text{Ø} & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\bullet\vec{v}(k)=A\bullet\vec{v}(k)$$

Durch wiederholte Anwendung der MMV erhält man die Vermögensvektorfolge

$$\begin{pmatrix}6\\1\text{Ø}\\2\text{Ø}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}8\\13\\15\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\text{Ø},5\\11,5\\14\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}11\\12,25\\12,75\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}11,625\\11,785\\12,5\end{pmatrix}\quad\ldots$$

Sie gibt anhand der nachfolgenden Überlegung Anlaß zur Definition der Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix:

$$\vec{v}(k+2)=\underbrace{A\bullet\underbrace{(A\bullet\vec{v}(k))}_{\text{abs. Vermögensanteile}}}_{\text{abs. Vermögensanteile}}\qquad\qquad \vec{v}(k+2)=\underbrace{\underbrace{(A\bullet A)}_{\text{rel. Vermögensanteile}}\bullet\vec{v}(k)}_{\text{abs. Vermögensanteile}}$$

Fortgesetzte Wiederholung führt zum Begriff der Potenz einer Matrix

$$\vec{v}(k)=A^k\bullet\vec{v}(\text{Ø})$$

darüber hinaus aber auch zu der naheliegenden Frage, ob die Vektorfolge einem Grenzwert (eigentlich: Grenzvektor) $\vec{v}$ zustrebt. Gibt es ihn, so darf er bei neuerlicher Anwendung von A seinen Wert nicht mehr ändern. Die formale Beschreibung dieser Überlegung führt zur Vektorgleichung

$$\vec{v}=A\bullet\vec{v}\;\Leftrightarrow\;\begin{array}{l}v_1=1/2\bullet v_1+1/2\bullet v_2\\v_2=1/2\bullet v_1\qquad\qquad+1/2\bullet v_3\\v_3=\qquad\qquad 1/2\bullet v_2+1/2\bullet v_3\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist einparametrig lösbar. Wegen der Nebenbedingung $v_1+v_2+v_3=6+10+20=36$ (die Summe der Vermögenswerte bleibt ja im Zuge der Umverteilungen unverändert) erhält man die eindeutige Lösung $\vec{v}=(12|12|12)$. Daraus folgt, daß der Grenzwert der Matrizenfolge für $k\to\infty$ eine Matrix folgender Gestalt ist:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Obwohl der Zustand (12|12|12) erst nach unendlich vielen Umverteilungsschritten erreicht wird, besteht für die Reichen kein Grund zum Jubeln. Wie die obige Folge zeigt, unterscheidet sich $\vec{v}(4)$ von $\vec{v}$ nicht mehr sehr viel. Die Reichen könnten daher darauf dringen, die Umverteilung langsamer vorzunehmen, sozusagen in Zeitlupe. Die Armen könnten hingegen darauf dringen, daß die Umverteilung noch schneller geschieht, sozusagen im Zeitraffer.

Wendet man z.B. statt der Matrix A die Matrix

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

alle 4 Jahre an, so läuft die Umverteilung mit doppelter Geschwindigkeit ab.

Umgekehrt läuft die durch die Matrix A vermittelte Umverteilung gegenüber der durch die Matrix A^2 vermittelten in halbem Tempo ab. Diese Überlegung rechtfertigt die zunächst ungewohnte Sprechweise, daß die Matrix A die Quadratwurzel aus der Matrix A^2 ist:

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

In analoger Weise kann man fragen, durch welche Matrix man einen Umverteilungsschritt wieder rückgängig machen kann. Man gelangt so zur inversen Matrix $B=A^{-1}$. Zur Berechnung der 9 Matrixeinträge braucht man neun Bedingungen: Sechs Bedingungen ergeben sich aus der Tatsache, daß die drei Zeilensummen und die drei Spaltensummen jeder Umverteilungsmatrix den Wert 1 haben. Die drei restlichen Bedingungen erhält man z.B. aus $\vec{v}(1)$ und $\vec{v}(0)$:

$$6=b_{11}\cdot 8+b_{12}\cdot 13+b_{13}\cdot 15$$
$$10=b_{21}\cdot 8+b_{22}\cdot 13+b_{23}\cdot 15$$
$$20=b_{31}\cdot 8+b_{32}\cdot 13+b_{33}\cdot 15$$

Man erhält:

$$A^{-1}=B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Matrix kann man nun die Umverteilung zuungunsten der Armen rückwärts laufen lassen, und die Folgenglieder $\vec{V}(-1)$, $\vec{V}(-2)$ berechnen. Im Sinne des Modells haben aber die Folgenglieder nur solange eine Bedeutung, als ihre Koordinaten nicht negativ sind.

3. Rückblick und Ausblick

Das letzte Beispiel hat (hoffentlich) gezeigt, daß man auf einem den Schülern zumutbaren Niveau Folgen und Grenzwerte von Vektoren und Matrizen betrachten kann. Das Ziel des Beispiels bestand aber nur in zweiter Linie in der Erarbeitung solcher Begriffe. In erster Linie ging es darum, im Zusammenhang mit Vektoren und Matrizen ein Modell zu entwerfen, aus diesem gewisse (prognostische) Fragen zu beantworten und die Antworten wie auch das Modell selbst kritisch zu prüfen und zu reflektieren. Wenn das Modell auch sehr einfach und unbestreitbar wirklichkeitsfern ist, so gestattet es doch, dem Anliegen des Lehrplans hinsichtlich des Modellaspekts, des Anwendens von Mathematik und des Reflektierens mathematischen Tuns zu entsprechen.

Deutet man die Koordinaten des Vermögensvektors als Koordinaten eines Punktes X, so kann man die durch die Matrix A vermittelte Umverteilung als geometrische Abbildung $X_0 \rightarrow X_1$ deuten. Der Punkt X(12|12|12) ist der Fixpunkt dieser Abbildung. Insoferne läßt sich von diesem Zugang zu Vektoren und Matrizen eine Brücke zur Anwendung von Vektoren und Matrizen in der (Abbildungs-)Geometrie schlagen.

Literatur

L1 Reichel-Müller-Laub u.a:: Lehrbuch der Mathematik Bd. 5
Verl. hpt, Wien, 1989

L2 Bürger u.a: Mathematik Oberstufe Bd. 1
Verl. hpt, Wien, 1989

L3 Szirucek u.a.: Mathematik 5
Verl. Überreuter-hpt, Wien, 1989

L4 Bürger-Fischer-Malle-Reichel: Zur Einführung des Vektorbegriffs: Arithmetische Vektoren mit geometrischer Deutung
Verl. Schöningh, Wien, Sonderdruck